Prof. Dr. Klaus Eckhardt

Differential- und Integralrechnung
Teil 1: Beispiel Elektrizität

veröffentlicht im Internet unter aufgabomat.de

Inhalte: Ableitung, Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, am Beispiel von: Ladungstrennung, elektrische Kraft, Verschiebungsarbeit, elektrische Stromstärke, elektrische Spannung

Gliederung:

1 Vorwort

In der Mathematik wird die Differentialrechnung typischerweise über die Bestimmung einer Tangentensteigung eingeführt, die Integralrechnung über die Berechnung der Fläche unter einer Funktionskurve. Beide Teilgebiete der Mathematik werden schließlich über den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung miteinander verknüpft.

Hier wird ein anderer Ansatz verfolgt. Differential- und Integralrechnung werden anhand von Anwendungsbeispielen aus der Physik vorgestellt. Sie zeigen, dass überall dort, wo Prozesse mathematisch beschrieben werden, Differential- und Integralrechnung unverzichtbar sind. Dies gilt ebenso für die Natur- und Ingenieurwissenschaften wie für die Beschreibung und Optimierung von Vorgängen in den Wirtschaftswissenschaften oder Bestrebungen der Sozialwissenschaften, menschliches Verhalten mathematisch zu analysieren.

2 Elektrische Spannung und Stromstärke

2.1 Ladungstrennung (Integral)

Materie besteht zu einem großen Teil aus elektrisch geladenen Teilchen, aus positiv geladenen Protonen und negativ geladenen Elektronen. Erscheint ein Körper nach außen hin elektrisch neutral, dann deswegen, weil er vom Betrag her gleich große Mengen an positiver und negativer elektrischer Ladung enthält.

Diese beiden Ladungsanteile sollen voneinander getrennt werden. Während der eine Ladungsanteil am Ort $\vec{r}_1$ verbleibe, werde der andere Ladungsanteil an den Ort $\vec{r}_2$ verschoben[1]. Dabei muss gegen die anziehende **elektrische Kraft** $\vec{F}_C$ zwischen den ungleichnamigen Ladungen Arbeit verrichtet werden (Abbildung 1).

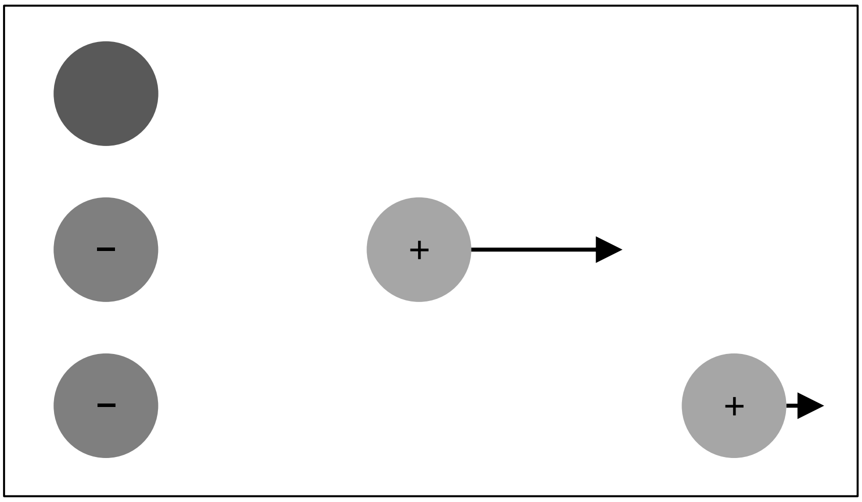

Abbildung 1: Auftrennung eines elektrisch neutralen Körpers (oben) in seinen negativen und seinen positiven Ladungsanteil. Die Pfeile stellen die Kraft dar, die momentan zur Trennung der Ladungen aufgewendet werden muss.

Die elektrische Kraft zwischen zwei punktförmigen Körpern, welche die Ladungen q und Q tragen (zwischen den **Punktladungen** q und Q), wirkt in Richtung ihrer Verbindungslinie. Der Betrag dieser Kraft, die auch als **Coulomb-Kraft** bezeichnet wird, ist proportional zu den beiden Ladungen und umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstandes r:

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\,Q}{r^2} \tag{1}$$

(**Coulomb-Gesetz**). ε_0 ist die **Influenzkonstante** (gerundeter Wert: $8{,}85 \cdot 10^{-12}\ C^2\ J^{-1}\ m^{-1}$).

Während der Ladungstrennung wächst der Abstand zwischen den Ladungen q und Q. Dadurch nimmt die elektrische Kraft ab. Entsprechend sinkt auch der Kraftaufwand, der für die Verschiebung erforderlich ist. Die **Verschiebungsarbeit** kann daher nicht einfach als das Produkt aus Kraft und Verschiebungsweg berechnet werden. Dies ist nur dann möglich, wenn die verschiebende Kraft über den Verschiebungsweg konstant ist.

Je kürzer der Verschiebungsweg ist, desto weniger kommt dieses Problem allerdings zum Tragen. Daher denkt man sich in einem ersten Schritt den Verschiebungsweg von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ in Wegelemente $\Delta\vec{r}_k$ zerlegt, die so kurz sind, dass die Kraft, die über sie hinweg wirkt, jeweils näherungsweise konstant ist.

In Abbildung 2 ist beispielhaft die Aufteilung eines Verschiebungsweges in nur zwei Wegelemente $\Delta\vec{r}_1$ und $\Delta\vec{r}_2$ gezeigt. Der Kraft, die über das Wegelement $\Delta\vec{r}_1$ wirkt, wird der konstante Vektor $\vec{F}_1$ zugeordnet, der Kraft, die über das Wegelement $\Delta\vec{r}_2$ wirkt, der konstante Vektor $\vec{F}_2$. Die Verschiebungsarbeit

[1] Zur Bezeichnung von Positionen im Raum durch Ortsvektoren siehe Skript „Differential- und Integralrechnung, Teil 2: Beispiel Kinematik“ unter aufgabomat.de.

ΔW_1 über den ersten Teil des Weges kann damit näherungsweise als $\vec{F}_1\,\Delta\vec{r}_1$ berechnet werden[2], die Verschiebungsarbeit ΔW_2 über den zweiten Teil des Weges näherungsweise als $\vec{F}_2\,\Delta\vec{r}_2$. Die Verschiebungsarbeit $W = \Delta W_1 + \Delta W_2$ über den gesamten Weg ist dann

$$W \approx \vec{F}_1\,\Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2\,\Delta\vec{r}_2 .$$

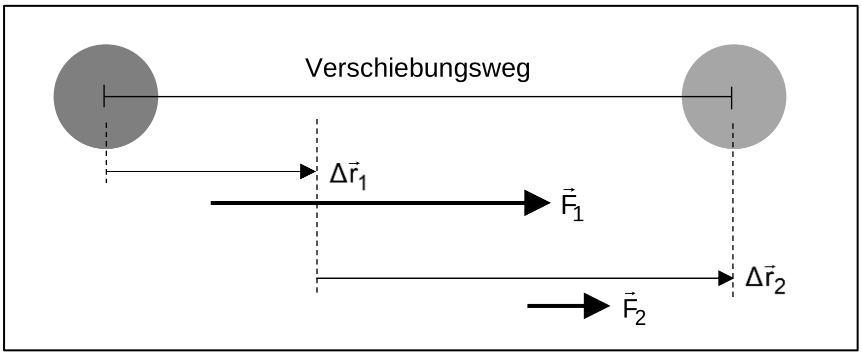

Abbildung 2: Aufteilung des Verschiebungsweges in Wegelemente $\Delta\vec{r}_k$.

Bei einer beliebigen Anzahl n von Wegelementen $\Delta\vec{r}_k$, über die hinweg jeweils näherungsweise eine konstante Kraft $\vec{F}_k$ wirkt, liefert die Verschiebung über jedes der Wegelemente einen Beitrag ΔW_k zur Gesamtverschiebungsarbeit W, der sich näherungsweise als $\vec{F}_k\,\Delta\vec{r}_k$ berechnet:

$$\Delta W_k \approx \vec{F}_k\,\Delta\vec{r}_k .$$

W ergibt sich als Summe all dieser Beiträge:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{k=1}^{n} \Delta W_k \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k\,\Delta\vec{r}_k . \end{aligned}$$

Diese Näherung wird umso besser, je kürzer die Wegstücke $\Delta\vec{r}_k$ sind bzw. je größer ihre Anzahl n ist. Die exakte Verschiebungsarbeit ergibt sich, wenn die Länge der Wegstücke gegen null und ihre Anzahl damit gegen unendlich geht:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k\,\Delta\vec{r}_k .$$

Dieser Grenzwert wird in der Mathematik auch als das **Integral** der Kraft über den Weg bezeichnet und abkürzend geschrieben als

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k\,\Delta\vec{r}_k = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\,d\vec{r} .$$

Die Verschiebungsarbeit ist

[2] Die Formulierung als Skalarprodukt zweier Vektoren stellt sicher, dass die Berechnung auch dann richtig erfolgt, wenn die beiden Vektoren nicht parallel zueinander ausgerichtet sein sollten.

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\, d\vec{r} \, . \tag{2}$$

Diese Arbeit wird bei der Ladungstrennung an den Ladungen q und Q verrichtet.

Gibt man den voneinander getrennten Ladungen die Möglichkeit, sich frei zu bewegen, so werden sie durch die anziehende elektrische Kraft aufeinander zu beschleunigt. Es entsteht eine gerichtete Bewegung von elektrischer Ladung im Raum, ein **elektrischer Strom**. Bewegte elektrisch geladene Teilchen aber können bekanntlich selbst Arbeit verrichten, beispielsweise einen elektrischen Leiter erwärmen oder einen Elektromotor antreiben. In den voneinander getrennten Ladungen q und Q steckt somit das Vermögen, Arbeit zu verrichten. Man spricht davon, dass sie **Energie** besitzen. Die Energie der voneinander getrennten Ladungen entspricht der Arbeit, die für die Ladungstrennung aufgewendet werden musste.

Um eine solche Ladungskonstellation zu charakterisieren, wird allerdings üblicherweise nicht ihre Energie in der SI-Einheit[3] Joule, sondern ihre **elektrische Spannung** U in der Einheit Volt angegeben. Die elektrische Spannung ist definiert als Energie pro Ladung:

$$U = \frac{W}{q} \, . \tag{3}$$

Man spricht daher davon, dass durch die Ladungstrennung eine **Spannungsquelle** geschaffen worden ist.

2.2 Mittel- und Momentanwerte der elektrischen Stromstärke (Ableitung)

Voraussetzung dafür, dass ein elektrischer Strom fließen kann, ist, dass elektrisch geladene Teilchen voneinander getrennt worden sind bzw. dass eine Spannungsquelle existiert (Abschnitt 2.1). Spannungsquellen in Stromkreisen (Batterien, Akkumulatoren, geladene Kondensatoren, ...) besitzen zwei Pole, den Plus- und den Minuspol. Am Minuspol herrscht ein Elektronenüberschuss, am Pluspol ein Elektronenmangel. Werden die beiden Pole einer Spannungsquelle durch einen elektrischen Leiter miteinander verbunden, so fließen die überschüssigen Elektronen vom Minuspol in Richtung des Pluspols. Dies ist die **physikalische Stromrichtung**. Die **technische Stromrichtung** ist aus historischen Gründen gerade umgekehrt, vom Plus- zum Minuspol, definiert.

Die Stärke des elektrischen Stroms (**elektrische Stromstärke**) wird daran gemessen, wieviel Ladung pro Zeiteinheit durch den Leiterquerschnitt fließt. Im Allgemeinen ändert sich die Stromstärke mit der Zeit, beispielsweise, wenn als Spannungsquelle ein Akkumulator oder ein Kondensator dient, der sich entlädt. Betrachtet man ein Zeitintervall Δt und misst in diesem Zeitintervall den Durchfluss einer Ladungsmenge ΔQ, so kann man hieraus die **mittlere Stromstärke** im Zeitintervall Δt berechnen. Dies wird in der folgenden Gleichung dadurch kenntlich gemacht, dass das Symbol I für die Stromstärke in spitze Klammern gesetzt wird:

$$\langle I \rangle = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \, . \tag{4}$$

[3] SI = système international d'unités, siehe beispielsweise Skript „Dimension und Einheit" unter aufgabomat.de

Die momentane Stromstärke wird durch Gleichung 4 umso besser beschrieben, je kleiner das betrachtete Zeitintervall Δt ist. Der **Momentanwert** I(t) der Stromstärke ergibt sich, wenn Δt gegen null geht:

$$I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} .$$

Dieser Grenzwert wird in der Mathematik auch als die **Ableitung** der elektrischen Ladung nach der Zeit bezeichnet und abkürzend geschrieben als

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} .$$

Es ist

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} . \qquad (5)$$

Die mathematische Operation einer Ableitung nach der Variable t wird durch den **Operator** d/dt angezeigt. Dieser wird „d nach d t" gelesen, die rechte Seite der Gleichung 5 als „d Q nach d t".

2.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Die elektrische Stromstärke in einer elektrischen Schaltung gibt an, welche Ladungsmenge pro Zeiteinheit durch ein Element dieser Schaltung fließt (Abschnitt 2.2). Umgekehrt lässt sich die Ladungsmenge, die in einem gewissen Zeitintervall durch ein solches Element hindurchtritt, grundsätzlich dadurch bestimmen, dass man die Stromstärke mit der Länge des Zeitintervalls multipliziert:

Stromstärke = Ladung/Zeit $\Leftrightarrow$ Ladung = Stromstärke · Zeit.

Allerdings ist die Stromstärke im Allgemeinen keine Konstante. Es gibt also nicht den einen Wert der Stromstärke, der mit der Länge des Zeitintervalls zu multiplizieren wäre, sondern man hat es mit zeitlich variablen Werten zu tun. Für bestimmte Vorgänge, zum Beispiel für die Entladung eines Kondensators[4], lässt sich berechnen, wie sich die Stromstärke mit der Zeit ändert. In anderen Fällen kann die Stromstärke mithilfe eines entsprechenden Messgerätes, eines Ampèremeters, erfasst werden. Wie aber kann mit diesen variierenden Werten der Stromstärke I die Ladungsmenge Q bestimmt werden?

Die Lösung besteht darin, dass man sich das Zeitintervall mit dem Anfangszeitpunkt t_1 und dem Endzeitpunkt t_2 in eine Anzahl n von Teilintervalle Δt_k zerlegt denkt, die so kurz sind, dass die Stromstärke über jedes dieser Teilintervalle hinweg einen näherungsweise konstanten Werte $I(t_k)$ hat. Die Ladungsmenge ΔQ_k, die in dem betreffenden Teilintervall fließt, kann dann näherungsweise als $I(t_k)\,\Delta t_k$ berechnet werden. Um die Ladung Q über den Gesamtzeitraum der Länge $t_2 - t_1$ zu berechnen, müssen die Ladungsmengen in allen n Teilintervallen addiert werden:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{k=1}^{n} \Delta Q_k \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} I(t_k)\,\Delta t_k . \end{aligned}$$

[4] siehe beispielsweise Skript „Kondensatoren in der Gleichstromtechnik" unter aufgabomat.de

Diese Näherung wird umso besser, je kürzer die Zeitintervalle sind bzw. je größer ihre Anzahl n ist. Der exakte Wert der Ladung ergibt sich für den Grenzfall, dass die Länge der Zeitintervalle gegen null und ihre Anzahl damit gegen unendlich geht:

$$Q = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} I(t_k)\,\Delta t_k\ .$$

Dieser Grenzwert wird in der Mathematik auch als das Integral der Stromstärke über die Zeit bezeichnet und abkürzend geschrieben als

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} I(t_k)\,\Delta t_k = \int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt$$

(vgl. Abschnitt 2.1). Die Ladung berechnet sich als

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt\ . \qquad (6)$$

t_1 und t_2 sind die so genannten **Integrationsgrenzen**. t wird als die **Integrationsvariable** bezeichnet.

Im vorigen Abschnitt 2.2 ist erläutert worden, dass sich der Momentanwert der Stromstärke I bei gegebenem Fluss der elektrischen Ladung Q als die Ableitung der Ladung nach der Zeit ergibt (Gleichung 5). Gleichung 6 zeigt, dass sich die Ladung Q umgekehrt durch Integration der Stromstärke über die Zeit berechnet:

$$Q \;\text{———}\; \text{Ableitung}\ \frac{dQ}{dt} \longrightarrow I(t)$$

$$I(t) \;\text{———}\; \text{Integral}\ \int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt \longrightarrow Q.$$

Es handelt sich hier um ein Beispiel für die Gültigkeit des **Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung**: Differentiation und Integration sind Umkehroperationen zueinander.

3 Nachwort

Das vorliegende Skript führt die Differential- und Integralrechnung anhand von Beispielen aus der Elektrizitätslehre ein. In einem weiteren Skript „Differential- und Integralrechnung, Teil 2: Beispiel Kinematik“ dient die Beschreibung von Bewegung als Beispiel. Dieses Skript ist ebenfalls im Internet unter der Adresse aufgabomat.de abrufbar. In ihm werden die mathematischen Grundlagen vertieft. Es werden einfache Beispiele dafür gezeigt, wie sich Ableitung und Integral als Grenzwerte berechnen, Ableitungs- und Integrationsregeln vorgestellt und Ableitung und Integral wichtiger Funktionen angegeben.