Prof. Dr. Klaus Eckhardt

Differential- und Integralrechnung
Teil 2: Beispiel Kinematik

veröffentlicht im Internet unter aufgabomat.de

Inhalte: Ableitung, Integral, Ableitungs- und Integrationsregeln, Ableitung und Integration einer konstanten Funktion, einer linearen Funktion und einer Potenzfunktion, am Beispiel von: Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor, geradlinige gleichförmige und geradlinige gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Gliederung:

1 Vorwort

In der Mathematik wird die Differentialrechnung typischerweise über die Bestimmung einer Tangentensteigung eingeführt, die Integralrechnung über die Berechnung der Fläche unter einer Funktionskurve. Beide Teilgebiete der Mathematik werden schließlich über den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung miteinander verknüpft.

Hier wird ein anderer Ansatz verfolgt. Differential- und Integralrechnung werden anhand von Anwendungsbeispielen aus der Physik vorgestellt. Sie zeigen, dass überall dort, wo Prozesse mathematisch beschrieben werden, Differential- und Integralrechnung unverzichtbar sind. Dies gilt ebenso für die Natur- und Ingenieurwissenschaften wie für die Beschreibung und Optimierung von Vorgängen in den Wirtschaftswissenschaften oder Bestrebungen der Sozialwissenschaften, menschliches Verhalten mathematisch zu analysieren.

2 Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung

2.1 Vom Orts- zum Beschleunigungsvektor (Ableitung)

2.1.1 Grundgleichungen

Gegeben sei ein Punkt P im Raum. Um eindeutig angeben zu können, wo im Raum der Punkt liegt, muss ein Koordinatensystem definiert werden. Die Lage des Punktes wird durch seine Koordinaten in diesem System beschrieben, im zweidimensionalen Beispiel der Abbildung 1 durch die Koordinaten a und b. Ebenso gut kann dies durch den **Ortsvektor** $\vec{r}$ geschehen. Der Ortsvektor weist vom Koordinatenursprung zur Position des Punktes. Seine Länge bzw. sein Betrag entspricht dem Abstand des Punktes vom Koordinatenursprung. Die Komponenten des Ortsvektors sind die Koordinaten des Punktes.

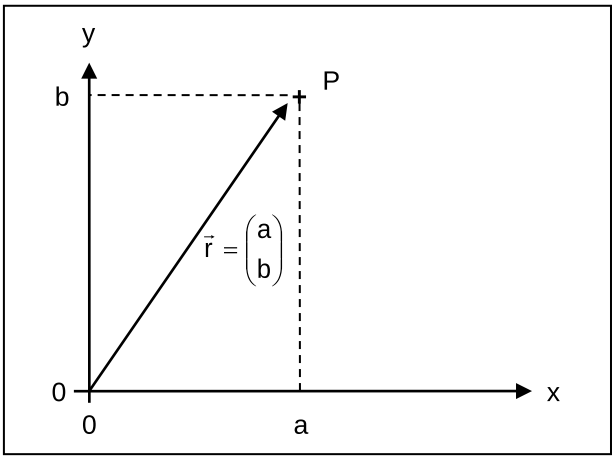

Abbildung 1: Beschreibung der Lage eines Punktes durch seine Koordinaten und seinen Ortsvektor.

Angenommen, der Punkt, dessen Position zum Zeitpunkt t dem Ortsvektor $\vec{r}(t)$ entspricht, verschiebt sich in der Zeitspanne Δt an eine andere Position $\vec{r}(t+\Delta t)$ (Abbildung 2). $\vec{r}(t+\Delta t)$ entsteht dadurch, dass man den Verschiebungsvektor zu $\vec{r}(t)$ addiert. Daher kann der Verschiebungsvektor auch als $\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$ angegeben werden:

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \text{Verschiebungsvektor} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Verschiebungsvektor} = \vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$$

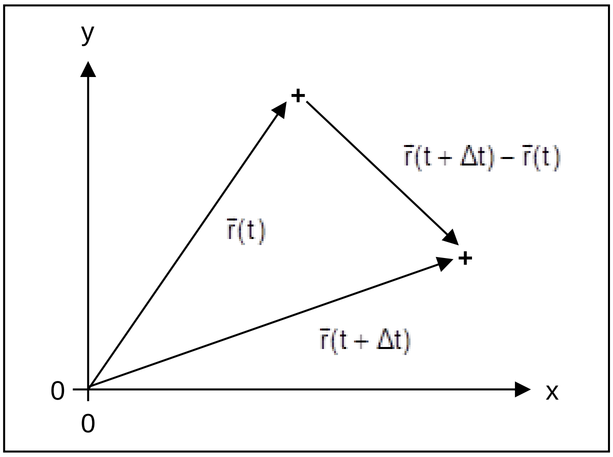

Abbildung 2: Zeitliche Änderung des Ortsvektors durch Bewegung.

Die Bewegung lässt sich dadurch charakterisieren, dass man den Verschiebungsvektor durch die Zeit Δt dividiert, in der die Bewegung erfolgt ist. Auf diese Weise ergibt sich der so genannte **Geschwindigkeitsvektor** $\vec{v}$.

Da sich der Geschwindigkeitsvektor möglicherweise über den Verschiebungsweg geändert hat, erhält man so allerdings nur eine Information über die **mittlere Geschwindigkeit** des Punktes im Zeitintervall von t bis t + Δt. Dies wird in Gleichung 1 dadurch kenntlich gemacht, dass das Vektorsymbol $\vec{v}$ in spitze Klammern gesetzt wird:

$$< \vec{v} > = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \tag{1}$$

Die momentane Geschwindigkeit des Punktes während der Verschiebung wird durch die Gleichung 1 umso besser beschrieben, je kleiner das betrachtete Zeitintervall Δt ist. Die **Momentangeschwindigkeit** $\vec{v}(t)$ selbst ergibt sich, wenn Δt gegen null geht:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Dieser Grenzwert wird in der Mathematik auch als die **Ableitung** des Ortvektors nach der Zeit bezeichnet und abkürzend geschrieben als

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}.$$

Es ist

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}. \tag{2}$$

Die mathematische Operation einer Ableitung nach der Variable t wird durch den **Operator** d/dt angezeigt. Dieser wird „d nach d t“ gelesen.

Ändert sich der Geschwindigkeitsvektor mit der Zeit, so spricht man von einer **beschleunigten Bewegung**. Wird in den vorigen Ausführungen $\vec{r}(t)$ durch $\vec{v}(t)$ ersetzt, ergibt sich analog zu den Gleichungen 1 und 2 für die mittlere Beschleunigung

$$< \vec{a} > = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \tag{3}$$

und als **Momentanwert der Beschleunigung** die Ableitung des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}. \tag{4}$$

Eine Ableitung zeigt, wie eine Variable reagiert, wenn sich eine andere Variable ändert. Die Beschleunigung zeigt, wie sich die Geschwindigkeit mit der Zeit ändert. Die Geschwindigkeit zeigt, wie sich der Ort mit der Zeit ändert.

2.1.2 Berechnung von Ableitungen als Grenzwerte

Hier zwei Beispiele für die Ableitung

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

von Funktionen einfachen Typs:

- Ableitung einer konstanten Funktion f(x) = a:

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a-a}{\Delta x} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

- Ableitung einer linearen Funktion f(x) = a x + b:

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x)+b-(a\,x+b)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\,x + a\,\Delta x + b - a\,x - b}{\Delta x} \\ &= a \end{aligned} \tag{6}$$

2.1.3 Ableitungsregeln

Um die Bestimmung solcher Grenzwerte zu erleichtern, sind in der Mathematik Ableitungsregeln formuliert worden. Dazu gehören:

- **Faktorregel**: $\frac{d}{dx}\left[a\ f(x)\right] = a\ \frac{df(x)}{dx}$ (7)

- **Summenregel**: $\frac{d}{dx}\left[f_1(x)+\ldots+f_n(x)\right] = \frac{d}{dx}\ f_1(x)+\ldots+\frac{d}{dx}\ f_n(x)$ (8)

- **Ableitung von Potenzfunktionen** f(x) = x^q:
  q ∈ |R ist der so genannte Exponent, x die Basis. Diese darf nur solche Werte annehmen, die nicht dazu führen, dass durch Null dividiert oder eine geradzahlige Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen wird. Es gilt

$$\frac{dx^q}{dx} = q\ x^{q-1}. \tag{9}$$

Aus den Gleichungen 7 bis 9 folgt beispielsweise für die konstante Funktion f(x) = a = a x^0

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\ a\ x^0 &= a\ \frac{dx^0}{dx} \\ &= a \cdot 0\ x^{0-1} \\ &= 0 \text{ (Gleichung 5)} \end{aligned}$$

und für die lineare Funktion $f(x) = a\,x + b = a\,x^1 + b$

$$\frac{d}{dx}(a\,x^1 + b) = a\,\frac{dx^1}{dx} + \frac{db}{dx}$$
$$= a \cdot 1\,x^{1-1} + 0$$
$$= a \text{ (Gleichung 6).}$$

- **Ableitung von Vektoren**:
  Vektoren werden komponentenweise abgeleitet. Aus dem dreidimensionalen Vektor $\vec{r}(t)$ mit den Komponenten $r_x(t)$, $r_y(t)$ und $r_z(t)$ entsteht ein Vektor mit den Komponenten

  $$\frac{dr_x(t)}{dt}, \frac{dr_y(t)}{dt}, \frac{dr_z(t)}{dt}.$$

  Beispiel: Im Fall der **geradlinigen gleichförmigen Bewegung** ist der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ konstant mit zeitunabhängigen Komponenten v_x, v_y und v_z. Unter Anwendung der Gleichung 5 ergibt sich

  $$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} dv_x/dt \\ dv_y/dt \\ dr_z/dt \end{pmatrix}$$
  $$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  In keiner Richtung des Raumes tritt eine Beschleunigung, d. h. eine Änderung der Geschwindigkeit, auf.

2.2 Vom Beschleunigungs- zum Ortsvektor (Integral)

2.2.1 Grundgleichungen

Ist die mittlere Geschwindigkeit $<\vec{v}>$ bekannt, mit der eine Bewegung zwischen einem Zeitpunkt t_1 und einem Zeitpunkt t_2 erfolgt, so kann der Weg, der während dieser Zeit zurückgelegt wird, entsprechend Gleichung 1 berechnet werden als

$$\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = <\vec{v}> (t_2 - t_1). \tag{10}$$

Der Weg lässt sich aber auch bestimmen, ohne dass die mittlere Geschwindigkeit $<\vec{v}>$ bekannt sein muss. Dazu denkt man sich das Zeitintervall $t_2 - t_1$ in Abschnitte Δt_k unterteilt, die um Zeitpunkte t_k herum liegen und so kurz sind, dass die mittlere Geschwindigkeit jeweils näherungsweise der Momentangeschwindigkeit $\vec{v}(t_k)$ entspricht. Jedes der n Teilintervalle Δt_k liefert einen Beitrag $\Delta\vec{r}_k$ zur Gesamtverschiebung. Dieser Beitrag lässt sich näherungsweise durch Multiplikation der Momentangeschwindigkeit mit Δt_k berechnen:

$$\Delta\vec{r}_k \approx \vec{v}(t_k)\ \Delta t_k.$$

Die Gesamtverschiebung ergibt sich als Summe all dieser Beiträge:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) &= \sum_{k=1}^{n} \Delta\vec{r}_k \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} \vec{v}(t_k)\, \Delta t_k \ .\end{aligned}$$

Die Näherung wird umso besser, je kürzer die Zeitintervalle Δt_k sind bzw. je größer die Anzahl n der Zeitintervalle ist. Es ist

$$\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \vec{v}(t_k)\, \Delta t_k \ .$$

Dieser Grenzwert wird in der Mathematik auch als das **Integral** der Geschwindigkeit über die Zeit bezeichnet und abkürzend geschrieben als

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \vec{v}(t_k)\, \Delta t_k = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\, dt \,.$$

Es ist

$$\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\, dt \,. \tag{11}$$

t_1 und t_2 sind die so genannten **Integrationsgrenzen**. t wird als die **Integrationsvariable** bezeichnet.

Wird in den vorigen Ausführungen $\vec{v}(t)$ durch $\vec{a}(t)$ ersetzt, ergibt sich analog zu den Gleichungen 10 und 11

$$\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1) = \langle \vec{a} \rangle\, (t_2 - t_1) \tag{12}$$

und

$$\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)\, dt \,. \tag{13}$$

Integrale drücken aus, wie sich der Wert einer Variable über das Integrationsintervall ändert, wenn eine Information darüber vorliegt, mit welcher Rate diese Änderung erfolgt. So ist die Beschleunigung die Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit. Durch Integration der Beschleunigung (Gleichung 13) kann die Änderung der Geschwindigkeit in einem Zeitraum von t_1 bis t_2 berechnet werden. Die Geschwindigkeit ist die Änderung des Ortes mit der Zeit. Durch Integration der Geschwindigkeit (Gleichung 11) kann die Änderung des Ortes in einem Zeitraum von t_1 bis t_2 berechnet werden.

2.2.2 Berechnung von Integralen als Grenzwerte

Als ein Beispiel für die Integration von Funktionen durch die Bestimmung eines Grenzwertes sei hier diejenige der konstanten Funktion f(x) = a betrachtet:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k$$

$$\int_{x_1}^{x_2} a\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a\,\Delta x_k$$

$$= a \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$$

Die n Intervalle Δx_k unterteilen das Integrationsintervall, das sich von x_1 bis x_2 erstreckt. Addiert man sie alle, ergibt sich, unabhängig von ihrer Anzahl, die Länge $x_2 - x_1$ des Integrationsintervalls. Daher ist

$$\int_{x_1}^{x_2} a\,dx = a\,(x_2 - x_1). \tag{14}$$

2.2.3 Integrationsregeln

Um die Bestimmung von Integralen zu erleichtern, sind in der Mathematik Integrationsregeln formuliert worden. Dazu gehören:

- **Faktorregel**: $\int_{x_1}^{x_2} C\,f(x)\,dx = C \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ (15)
- **Summenregel**: $\int_{x_1}^{x_2} \left[f_1(x) + \ldots + f_n(x)\right] dx = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\,dx + \ldots + \int_{x_1}^{x_2} f_n(x)\,dx$ (16)
- **Integration einer Potenzfunktion** $f(x) = x^q$ mit $q \neq -1$:

$$\int_{x_1}^{x_2} x^q\,dx = \frac{1}{q+1}\,(x_2^{q+1} - x_1^{q+1}) \tag{17}$$

Aus den Gleichungen 15 bis 17 folgt beispielsweise für die konstante Funktion $f(x) = a = a\,x^0$

$$\int_{x_1}^{x_2} a\,dx = a \int_{x_1}^{x_2} x^0\,dx$$

$$= a\,\frac{1}{0+1}\,(x_2^{0+1} - x_1^{0+1})$$

$$= a\,(x_2 - x_1) \text{ (Gleichung 14)}$$

und für die lineare Funktion $f(x) = a\,x + b = a\,x^1 + b$

$$\int_{x_1}^{x_2} (a\,x + b)\,dx = a \int_{x_1}^{x_2} x^1\,dx + \int_{x_1}^{x_2} b\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,a\,(x_2^2 - x_1^2) + b\,(x_2 - x_1). \tag{18}$$

- **Integration von Vektoren**:
  Vektoren werden komponentenweise integriert. Aus einem dreidimensionalen Vektor $\vec{a}(t)$ mit den Komponenten $a_x(t)$, $a_y(t)$ und $a_z(t)$ entsteht ein Vektor mit den Komponenten

$$\int_{t_1}^{t_2} a_x(t)\,dt\,,\ \int_{t_1}^{t_2} a_y(t)\,dt\,,\ \int_{t_1}^{t_2} a_z(t)\,dt\,.$$

2.2.4 Die geradlinige gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Im Fall der geradlinigen gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist der Beschleunigungsvektor $\vec{a}$ konstant mit zeitlich unveränderlichen Komponenten a_x, a_y und a_z. Unter Anwendung der Gleichung 14 ergibt sich

$$\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}\,dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} dt$$

$$= \begin{pmatrix} a_x\,(t_2 - t_1) \\ a_y\,(t_2 - t_1) \\ a_z\,(t_2 - t_1) \end{pmatrix}$$

$$= \vec{a}\,(t_2 - t_1).$$

Wird die Zeit vom Zeitpunkt t_1 an gemessen, so ist $t_1 = 0$. Einen Index an das Variablensymbol t zu setzen, ist damit unnötig. Somit lässt sich vereinfachend $t_2 = t$ schreiben und es ergibt sich

$$\vec{v}(t) = \vec{a}\,t + \vec{v}(0)\,.$$

Ist das Koordinatensystem so ausgerichtet, dass die Vektoren auf einer der Koordinatenachsen liegen (Abbildung 3), so sind zwei der drei Koordinaten null. In diesem Fall kann auf die vektorielle Notation verzichtet werden und die obige Gleichung vereinfacht sich zu

$$v(t) = a\,t + v(0). \tag{19}$$

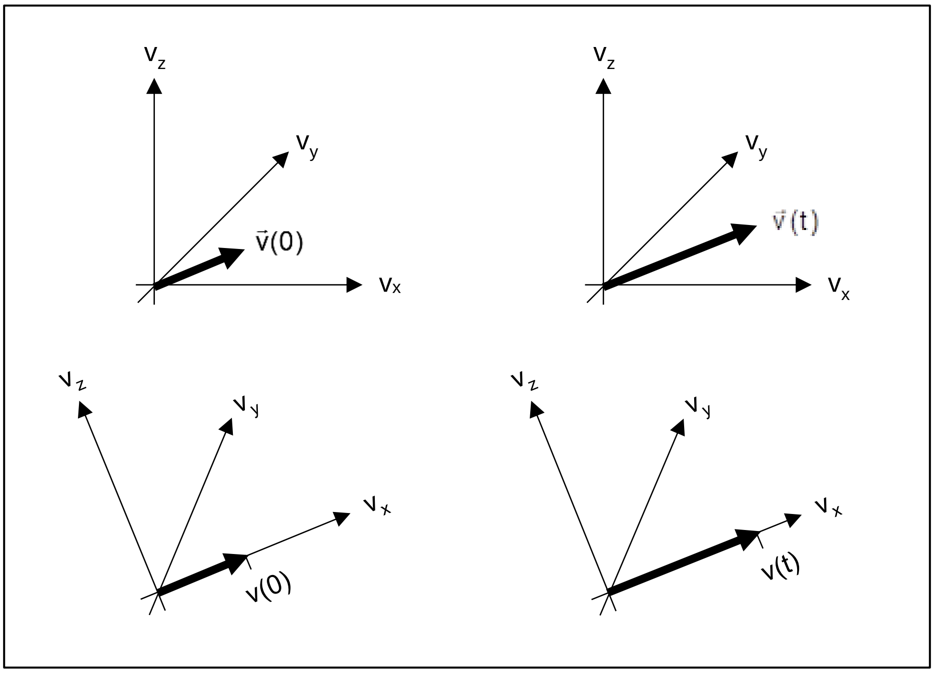

Abbildung 3: Bei geeigneter Drehung des Koordinatensystems können die Vektoren $\vec{v}(0)$ und $\vec{v}(t)$ durch die skalaren Größen v(0) und v(t) ersetzt werden.

Die Änderung des Ortes ergibt sich in diesem Fall als

$$r(t) - r(0) = \int_0^t v(t')\, dt' \,.$$

Integrationsgrenzen und Integrationsvariable müssen unterschieden werden. Daher wird letztere hier mit t' bezeichnet. Unter Verwendung von Gleichung 19 ist

$$\begin{aligned} r(t) - r(0) &= \int_0^t \left[a\, t' + v(0)\right] dt' \\ &= \int_0^t a\, t'\, dt' + \int_0^t v(0)\, dt' \\ &= \frac{1}{2}\, a\, (t^2 - 0) + v(0)\, (t - 0) \end{aligned}$$

$$r(t) = \frac{1}{2}\, a\, t^2 + v(0)\, t + r(0). \qquad (20)$$

3 Zusammenfassung

Differential- und Integralrechnung werden benötigt, wenn es um lokale Änderungen von Variablen in Zeit oder Raum geht.

Die Begriffe Ableitung und Integral bezeichnen Grenzwerte:

- Ableitung $\frac{df(x)}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

- Integral $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\, \Delta x_k$.[1]

Eine Ableitung zeigt, wie eine Variable reagiert, wenn sich eine andere Variable ändert. Integrale erlauben es zu berechnen, wie sich der Wert einer Variable über das Integrationsintervall ändert, wenn eine Information darüber vorliegt, mit welcher Rate diese Änderung erfolgt.

Zur Bestimmung von Ableitungen und Integralen sind Regeln entwickelt worden, von denen einige im vorliegenden Skript aufgeführt worden sind (Abschnitte 2.1.3 und 2.2.3).

Es ist empfehlenswert, auswendig zu wissen, wie konstante Funktion, lineare Funktion und Potenzfunktion abgeleitet und integriert werden, da sie in der Praxis häufig vorkommen (Tabelle 1).

	Ableitung $\frac{df(x)}{dx}$	Integral $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$
konstante Funktion $f(x) = a$	0 (Gl. 10)	$a\,(x_2 - x_1)$ (Gl. 14)
lineare Funktion $f(x) = a\,x + b$	a (Gl. 6)	$\frac{1}{2}\, a\,(x_2^2 - x_1^2) + b\,(x_2 - x_1)$ (Gl. 18)
Potenzfunktion $f(x) = x^q$	$q\,x^{q-1}$ (Gl. 9)	$\frac{1}{q+1}\,(x_2^{q+1} - x_1^{q+1})$ (Gl. 17)

Tabelle 1: Ableitung und Integral von konstanter Funktion, linearer Funktion und Potenzfunktion.

[1] Dies entspricht der Berechnung einer Fläche unter einer Funktionskurve durch so genannte Obersummen.